Programação Matemática
Lista 01 – Modelagem e Método Gráfico

Professor: Daniel Henrique Silva

Do livro-texto do curso (Arenales et. al.)

Seção 2.12, exercícios: 2.1; 2.2; 2.3; 2.4; 2.9 (só o item a)); 2.17 (só os itens a); b) e d))

Seção 3.13, exercícios: 3.1; 3.2; 3.3; 3.4; 3.5;

Além desses exercícios:

1) (*Adaptado da lista de exercícios de Programação Matemática 2017 – Professora Franklina*) Júlio começou a estudar no ICMC, e já percebeu que só estudar sem se divertir faz dele um bobalhão. Assim, ele quer partilhar seu tempo de aproximadamente 10 horas diárias livres entre estudo e diversão. Ele estima que se divertir é duas vezes mais importante do que estudar, e além disso, ele quer estudar pelo menos a mesma quantidade de tempo que dedica para diversão. Entretanto, Júlio percebeu que, para realizar todas as suas atividades, ele não pode se divertir mais do que 4 horas diárias.

a) Modele um problema linear para essa situação.
b) Resolva esse problema graficamente.

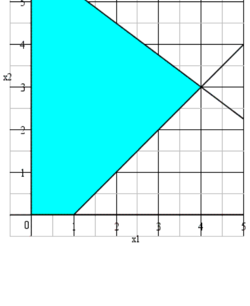
2) (*Adaptado da lista de exercícios de Programação Matemática 2017 – Professora Franklina*) Uma empresa de rádio de São Carlos constatou que o programa Parada Internacional, com 20 minutos de música e 1 minuto de propaganda chama a atenção de 30000 ouvintes, enquanto o programa Top Tunes, com 10 minutos de música e 1 minuto de propaganda chama a atenção de 10000 ouvintes. No decorrer de uma semana, o patrocinador insiste que hajam ao menos 5 minutos de sua propaganda, e a verba da estação permite no máximo 80 minutos de música.

a) Modele um problema linear que maximize o número de ouvintes. Esse problema é obrigatoriamente inteiro?
b) Resolva o problema graficamente.

3) (*Adaptado da lista de exercícios de Programação Matemática 2017 – Professora Franklina*) Um fabricante produz copos e garrafas plásticas. Para isso, ele pode utilizar dois processos, P_1 e P_2. A produção de copos leva 30 minutos usando o processo P_1 e 20 minutos usando o processo P_2. A produção de garrafas leva 35 minutos pelo processo P_1, e 40 minutos pelo processo P_2. Devido a mão de obra disponível, só se pode utilizar por semana, 40 horas do processo P_1, e 30 horas do processo P_2.

a) Crie um modelo que maximize a quantidade de copos e garrafas ao final de uma semana.
b) Se os copos dão um lucro unitário seis vezes menor do que as garrafas, o que deve ser mudado no modelo para maximizarmos o lucro total da empresa?

4) (*Adaptado da lista de exercícios de Programação Matemática 2017 – Professora Franklina*) Considere o problema de otimização $Max\ f(x) = c_1x_1 + c_2x_2$, sujeito à $\{Ax \leq b; x \geq 0\}$, cuja representação gráfica é dada pela figura a seguir:



(Gráfico gerado pelo software Maple)

a) Determine a matriz A, e o vetor b, correspondentes a esse gráfico.

b) Dê exemplos de quatro pares de valores $(c_1; c_2)$, de modo que esse problema admita quatro soluções ótimas distintas. Em cada exemplo, dê as coordenadas da solução ótima $(\overline{x_1}; \overline{x_2})$.

c) Fixe um valor para $(c_1; c_2)$ escolhida por você no exercício anterior, tal que $c_1 \neq 0; c_2 \neq 0$, e resolva o problema $Min\ f(x) = c_1x_1 + c_2x_2$, sujeito à $\{Ax \leq b; x \geq 0\}$ graficamente.

5) Dê um exemplo de problema de otimização onde as variáveis são inteiras, mas podem ser transformadas em reais, sem grandes perdas para a solução do problema.

6) (*Adaptado da lista de exercícios de Programação Matemática 2017 – Professora Franklina*) Dois de seus amigos possuem, cada um, R$10.000,00 para investir. O primeiro deles deseja escolher dentre dois investimentos A e B, e o segundo deseja escolher entre dois investimentos C e D. Alguns investimentos possuem limitantes máximo e/ou mínimo sobre a quantia investida. Essas informações, bem como o rendimento de cada investimento estão na tabela a seguir.

Investimento	Min	Max	Rendimento
A	0	não há limite	9,0%
B	1.000	5.000	11,0%
C	500	não há limite	10,5%
D	0	3.000	11,5%

a) Modele o problema de decisão do primeiro amigo, e resolva esse problema graficamente.

b) Modele o problema de decisão do segundo amigo, e resolva esse problema graficamente.

c) Suponha que você também possua R$10.000,00 para investir dentre as quatro opções de investimento. Responda sem resolver o problema: O valor máximo desse problema é menor ou igual, maior ou igual, ou não tem relação com os máximos dos problemas anteriores?

d) Assuma que esses investimentos tenham risco de 2.5%; 4%; 2% e 3%, respectivamente. O que muda se a nossa decisão é tentar minimizar o risco dos investimentos?

7) *(Adaptado da lista de exercícios de Programação Matemática 2017 – Professora Franklina*) Considere o problema de localização de armazéns, cujo objetivo é escolher os armazéns que devem ser instalados para servir um conjunto de clientes. Cda armazém tem uma dada capacidade, e cada cliente tem uma demanda conhecida. A soma da demanda dos clientes associados a um certo armazém não pode exceder a sua capacidade. O objetivo do problema é satisfazer as demandas dos clientes a um custo global mínimo, que envolve o custo de manutenção dos armazéns e o custo de transporte das mercadorias entre os armazéns e os clientes. Considere 4 possíveis armazéns (A; B; C e D), com capacidades e custos dados pela tabela. Os custos de transporte e as demandas são dados pela mesma tabela a seguir:

	Custo Mensal	Capacidade—	Custo de Transporte				
			a	b	c	d	e
A	50	35	2	5	1	2	5
B	32	28	4	4	9	1	4
C	28	22	1	8	5	6	2
D	36	28	7	1	2	1	8
		Demanda	14	12	10	12	8

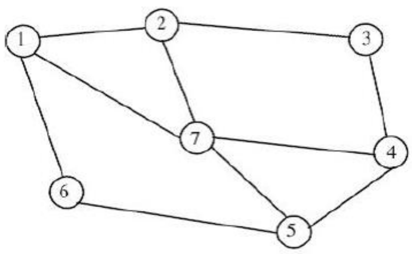
a) Determine um modelo de programação linear que permita determinar o conjunto ótimo de armazéns a selecionar.

b) Inclua uma restrição que impeça os armazéns A e C de serem escolhidos ao mesmo tempo.

c) Inclua uma restrição que faça os armazéns A e D serem escolhidos obrigatoriamente ao mesmo tempo, ou nenhum deles ser selecionado.

d) Inclua uma restrição que, caso o armazém B ou C sejam selecionados, então o armazém D deve ser escolhido.

8) *(Adaptado da lista de exercícios de Programação Matemática 2017 – Professora Franklina*) – A figura abaixo mostra uma parte de uma cidade, onde as arestas representam as ruas e os vértices representam pontos de encontro de ruas onde é possível se instalar hidrantes. A administração municipal pretende que cada rua (aresta) seja servida por pelo menos um hidrante. O custo de instalar um hidrante no local j é dado por $c_j = \{10; 10; 25; 20; 35; 20; 10\}$, respectivamente.



a) Construa um modelo de programação linear que vise minimizar os custos de instalação com hidrantes. Não se esqueça de declarar as variáveis de decisão e a função objetivo.

b) Se cada rua for atendida por *apenas* um hidrante, ao invés de ao menos um. O que muda no modelo?

9) Dado o problema de otimização dado por:

$Max\ f(x) = x_1 + 2x_2$

$$Sujeito\text{ à: } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 36 \\ x_1 - x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ 5x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Resolva esse problema graficamente.

b) Adicione uma restrição ao problema dado, de modo que a solução ótima passe a ser degenerada.

c) Adicione uma restrição ao problema dado, de modo que ele passe a ter infinitas soluções ótimas distintas.

d) Adicione ao problema dado a restrição $x_1 \in \mathbb{Z}; x_2 \in \mathbb{Z}$. Qual a solução ótima do problema?