Séries e Equações Diferenciais

Lista 02 - Séries Numéricas

Professor: Daniel Henrique Silva

Definições Iniciais

1) Defina com suas palavras o conceito de série numérica, e explicite diferenças entre sequência e série.

2) Defina soma parcial de uma série.

3) Defina com suas palavras o conceito de convergência de série.

4) Defina formalmente o conceito de convergência de série.

5) Uma definição alternativa para o conceito de convergência de séries é dada da seguinte forma: Dizemos que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge para um valor A, se, dado $\varepsilon > 0$, então existe um valor de $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\left(\sum_{n=1}^{k} a_n\right) - A\right| < \varepsilon$. Prove que essa definição é equivalente à definição por somas parciais de convergência de série.

6) Seja (a_n) uma sequência tal que suas somas parciais são dadas por $(s_n) = \frac{2n^2}{n^2+1}, \forall n \geq 1$.
   a) A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge?
   b) Determine uma expressão geral para os termos de (a_n)
   c) Calcule o valor da soma $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$

Séries Geométrica, Harmônica e Telescópica

7) Demonstre que $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \forall n \in \mathbb{N}, x \neq 1$

8) Seja $x \in \mathbb{R}$ um valor real fixo. Considere a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.
   a) Demonstre que essa série irá divergir se $x = 1$
   b) Demonstre que essa série irá divergir se $x = -1$
   c) Demonstre que essa série irá divergir se $|x| > 1$
   d) Demonstre que essa série irá convergir para $\frac{1}{1-x}$, se $|x| < 1$

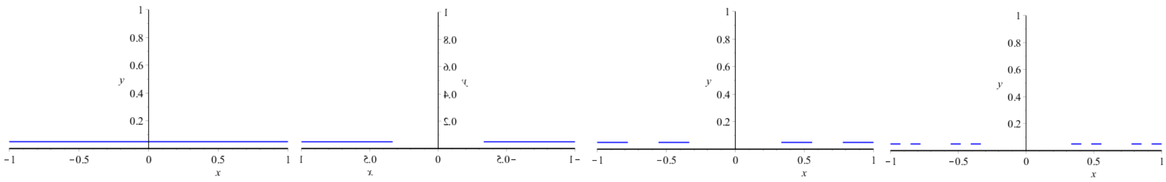
9) Através de séries geométricas, demonstre que $0.99999 \ldots = 1$

10) Através de séries geométricas, transforme as seguintes dízimas periódicas em frações irredutíveis:
   a) $0.2222222 \ldots$
   b) $4.71717171 \ldots$
   c) $0.11234234234234 \ldots$

11) Um pêndulo mecânico simples, após ser solto de uma altura inicial fixa, oscila, levando 3 segundos em sua primeira oscilação. Devido a forças de resistência, cada oscilação a partir desta leva 1% menos tempo que a oscilação anterior. Determine por quanto tempo o movimento do pêndulo persiste.

12) Em um episódio da famosa série “Futurama”, Bender, o robô é programado com a habilidade de duas cópias de si mesmo, com 60% do volume (e da massa) originais. Os robôs menores também acabam fazendo duas cópias de si mesmos, também com 60% do volume de si próprios, repetindo esse ciclo algumas vezes.
   a) Descreva através de uma série geométrica a massa total de todas as cópias dos robôs feitos.
   b) Demonstre que essa série diverge.
   c) Assuma que a Terra possui $2.1 \cdot 10^{24} Kg$ de ferro no total. Se a massa estimada do Bender original é de $400 Kg$, e cada geração nova de robôs é feita em um dia, em quanto tempo o ferro total do planeta seria consumido?

13) As figuras a seguir ilustram os primeiros passos para a construção de um fractal, conhecido como conjunto de Cantor. Começamos com o segmento de reta do ponto $(-1; 0)$ até o ponto $(1; 0)$, e dividimos esse segmento em três partes iguais, e retiramos seu terço médio. No próximo passo, para cada segmento restante, dividimos esse em três partes iguais, e retiramos seu terço médio, e assim por diante, em cada passo.



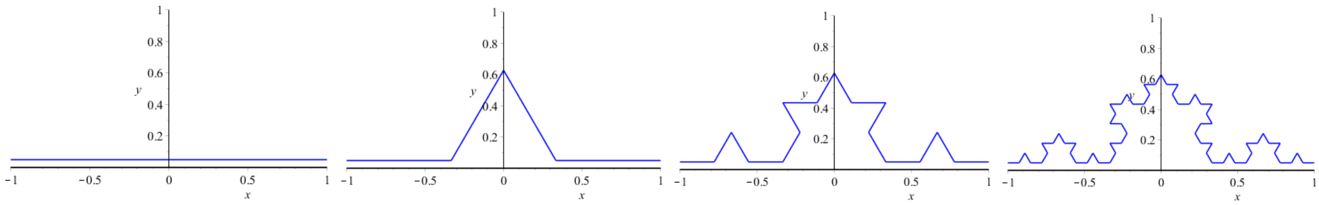
Para esse conjunto:

a) Determine o comprimento dessa curva na n-ésima iteração, utilizando uma série geométrica.

b) Mostre que conforme o número de iterações aumenta, o comprimento total do conjunto de Cantor tende a zero.

c) Observe que o ponto $\left(\frac{2}{3};0\right)$ nunca é retirado do conjunto, independente do número de iterações, bem como vários outros pontos. É possível que um conjunto com infinitos pontos tenha comprimento zero? (OBS: Esse item em especial não possui relação direta com o curso de séries. Encare ele como um desafio opcional)

14) As figuras a seguir ilustram os primeiros passos para a construção de um fractal, conhecido como curva de Koch. Começamos com o segmento de reta do ponto $(-1;0)$ até o ponto $(1;0)$, e dividimos esse segmento em três partes iguais, construindo um triângulo equilátero sobre essa curva, e depois eliminamos o segmento base desse triângulo. No próximo passo, em cada segmento de reta, nós repetimos o processo, e assim por diante, em cada passo.

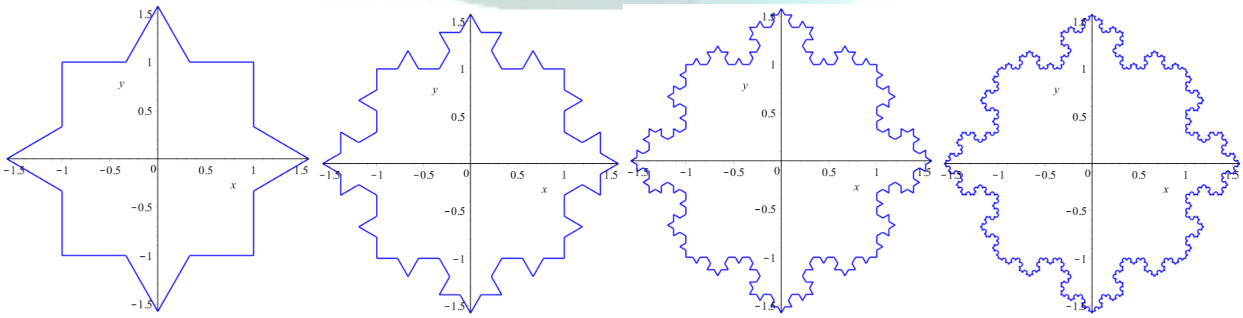


Para esse conjunto dado:

a) Determine o comprimento dessa curva na n-ésima iteração, utilizando uma série geométrica.

b) Mostre que o comprimento dessa curva tende a infinito.

15) Partindo de um quadrado de vértices $(-1;1);(1;1);(1;\ -1);(-1;\ -1)$, podemos aplicar em cada aresta desse quadrado o processo iterativo, gerando uma sequência de figuras geométricas, como as ilustradas:

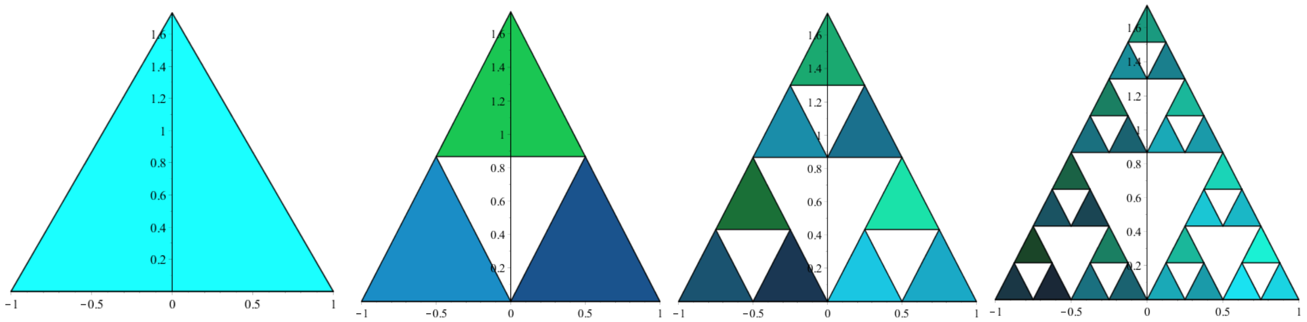


a) Determine uma fórmula para a área interna a essa figura, na sua n-ésima iteração, utilizando série geométrica.

b) Mostre que essa série converge, e determine a área total no limite n tendendo a infinito.

c) Demonstre que o perímetro dessa figura tende a infinito conforme o número de iterações cresce.

16) As figuras a seguir mostram os primeiros passos para a construção de um fractal, conhecido como triângulo de Sierpinsky. Partindo de um triângulo equilátero, marcamos os pontos médios dos lados desse triângulo, e os conectamos, formando um triângulo menor no centro, que é retirado, e três triângulos menores. Depois, em cada triângulo menor restante, nós marcamos os pontos médios de suas arestas, e repetimos o processo.



a) Determine, utilizando séries geométricas, uma expressão para a área da n-ésima iteração do processo.

b) Determine, utilizando séries geométricas, uma expressão para o perímetro total da n-ésima iteração do processo.

c) Mostre que, conforme as iterações tendem a infinito, a área desse fractal tende a zero, e o perímetro tende a infinito.

17) Demonstre que a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

18) As séries a seguir são telescópicas. Para cada item, verifique se as séries em questão convergem ou divergem, e determine um valor para sua soma, caso elas convirjam.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{n^2+3n}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^2-1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+15n+24}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

19) Considere a série $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\cdots$

a) Escreva essa série em forma de somatório.

b) Determine uma expressão para a soma parcial S_n dos n primeiros termos da série.

c) Verifique que a série converge, e calcule a sua soma.

20) Considere a série $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+r}{\beta q}+\frac{\alpha+2r}{\beta q^2}+\frac{\alpha+3r}{\beta q^3}+\cdots$

a) Escreva essa série em forma de somatório.

b) Determine uma expressão para a soma parcial S_n dos n primeiros termos da série.

c) Verifique que a série converge, e calcule a sua soma.

d) Se $\alpha = r = 1; \beta = q = 2$, o resultado condiz com o exercício anterior?

Critérios para Convergência de Séries Numéricas

21) Diga se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Justifique as afirmações verdadeiras, e para as falsas, apresente um contraexemplo.

a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente, e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série convergente, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ são ambas convergentes.

b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente, e $\lambda \in \mathbb{R}^*$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ é convergente.

c) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série divergente, e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série divergente, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ são ambas divergentes.

d) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série divergente, e $\lambda \in \mathbb{R}^*$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ é divergente.

e) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série divergente, e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série convergente, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ são ambas divergentes.

f) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente, então $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ é convergente, para qualquer $k \in \mathbb{N}$

g) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, então $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = A$

h) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente, então a série formada tomando-se apenas os termos pares convergirá.

i) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série divergente, então a série formada tomando-se apenas os termos pares divergirá.

22) Enuncie o critério da divergência para séries numéricas.

23) Dê um exemplo de duas séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de termos positivos tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$, mas a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

24) Enuncie o critério da integral para séries numéricas.

25) Através do critério da integral, classifique as séries $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(\ln(n))^p}$ em relação a sua convergência, de acordo com o valor do coeficiente $p \in \mathbb{R}$.

26) Explique graficamente o funcionamento do critério da integral, e utilize isso para explicar a fórmula de estimativa dada por $\int_2^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \int_1^{\infty} f(x)\,dx$. (OBS: Essa fórmula assume que o critério da integral pode ser aplicado. Caso contrário, ela não faz sentido).

27) Argumente geometricamente porque a fórmula de estimativa dada no exercício anterior é equivalente a dizer que $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \int_1^{\infty} f(x)\,dx\right| \le a_1$

28) Podemos melhorar a fórmula de estimativa dada pelo critério da integral calculando alguns termos, e fazendo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) + \sum_{n=k}^{\infty} a_n$, e aplicando a estimativa sobre o somatório não-determinado. O que devemos mudar na fórmula de erro?

29) Através do critério da integral, calcule um valor aproximado para as somas, com erro menor que 10^{-3}:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n ln(n)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{(n^2+4)^5}}$

30) Enuncie o critério da comparação simples para convergência de séries numéricas.

31) Enuncie o critério da comparação no limite para convergência de séries numéricas.

32) Considere as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Note que uma delas converge e uma diverge. Aplique o critério da comparação no limite entre essas séries e verifique o ocorrido.

33) Enuncie o critério da razão em módulo para convergência de séries numéricas.

34) Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série do tipo " $\frac{polinômio}{polinômio}$ ", então o critério da razão é sempre inconclusivo.

35) Enuncie o critério das raízes para convergência de séries numéricas.

36) Enuncie o critério das séries alternadas para convergência de séries numéricas.

37) Considere a série dada por $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$

a) Prove que ela pode ser escrita como soma de duas séries alternadas.

b) Conclua que essa série converge.

38) Escreva um resumo pessoal sobre quando utilizar cada critério para convergência de séries.

39) Para cada item a seguir, analise se a série converge ou diverge.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^4(3n)}{n^2+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln(n)}{n}$

d) $\sum_{(n=1)}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!}$

e) $\sum_{(n=1)}^{\infty} n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n-2}$

g) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot\ln(n)}$

h) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\ln(n)\cdot\ln(\ln(n))}$

i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{1+n+n^2+n^4}}{\sqrt{1+n^3+n^6+n^9}}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{n^2+4}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^n}{(2n+2)^n}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$
n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$
o) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$
p) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$
q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{n^4+9}$
r) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$
s) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
t) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n \cdot n!}{(2n)!}$

40) Defina convergência absoluta.

41) Demonstre que se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge

42) Dê um exemplo de uma série condicionalmente convergente que não seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

43) Para cada uma das séries do exercício 38), reclassifique-as entre absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.