Séries e Equações Diferenciais

Lista 03 – Séries de Funções

Professor: Daniel Henrique Silva

Sequências de Funções e Convergência Uniforme

1) Defina com suas palavras o conceito de sequência de funções.

2) Considere a sequência dada por $f_n(x) = \{f_n(x): [n; n+1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = n - x\}$. Essa é uma sequência de funções? Justifique.

3) Defina convergência pontual de funções.

4) Defina algebricamente (aquela definição com ε) convergência uniforme.

5) Interprete geometricamente a definição de convergência uniforme.

6) Considere a sequência de funções dada por $f_n(x): [-\pi; \pi] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \cos^{2n}(x)$
   a) Faça o esboço simultâneo das funções $f_1(x); f_2(x); f_3(x)$ e $f_4(x)$
   b) Calcule a função $f(x)$ para qual a sequência converge pontualmente.
   c) As funções $f_n(x)$ são contínuas no domínio? E $f(x)$?
   d) A convergência é uniforme?

7) Considere a sequência de funções dada por $f_n(x): [0; 1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} n, & se\ x \in \left[0; \frac{1}{n}\right] \\ 0, & se\ x \in \left]\frac{1}{n}; 1\right] \end{cases}$
   a) Faça o esboço simultâneo das funções $f_1(x); f_2(x); f_3(x)$ e $f_4(x)$
   b) Calcule a função $f(x)$ para qual a sequência converge pontualmente.
   c) Calcule $\int_0^1 f_n(x)dx$
   d) Calcule $\int_0^1 f(x)\,dx$
   e) Demonstre, com base nos itens anteriores, que essa convergência não é uniforme.

8) Considere a sequência de funções dada por $f_n(x): [1; 2] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{nx+1}{nx^2}$.
   a) Mostre que essa sequência de funções converge pontualmente para a função $f(x) = \frac{1}{x}$ no domínio dado.
   b) Utilizando software gráfico, intuitivamente, você diria que essa convergência é uniforme?
   c) Sem fazer cálculos das derivadas das funções $f_n(x)$, para qual função deve convergir a sequência $\lim_{n\to\infty}\left(f_n(x)\right)'$?

9) Determine para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ a série $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ irá convergir.

Séries de Potências

10) Defina série de potências, com centro na origem.

11) Defina série de potências, com centro em um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$.

12) Dê um exemplo de uma série de funções que não seja série de potências.

13) Demonstre que uma série de potências da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ sempre irá convergir para $x = x_0$.

14) Defina intervalo de convergência de uma série de potências.

15) Defina raio de convergência de uma série de potências.

16) Demonstre que, se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ é uma série de potências centrada em x_0, então seu raio de convergência é dado pela fórmula $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$.

17) Considere a série dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-4)^n}{n^2+1}$.

a) Qual o centro dessa série?

b) Determine o intervalo de convergência dessa série, e o raio de convergência da mesma, sem utilizar a fórmula do exercício anterior.

c) Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$. Compare os resultados, e justifique o ocorrido.

18) Considere a série dada por $\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)\cdot(x+1)^{3n+2}$.

a) Qual o centro dessa série?

b) Determine o intervalo de convergência dessa série, e o raio de convergência da mesma, sem usar a fórmula do exercício 16.

c) Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$. Compare os resultados, e justifique o ocorrido.

19) Em cada um dos itens anteriores, determine o centro da série, o intervalo de convergência (não se esqueça de testar os extremos quando for o caso), e o raio de convergência:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n(x-2)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(3x-2)^n}{n+3}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(n^2+9)x^{3n}}{4^n}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot \frac{(x+2)^{2n}}{7^{3n}}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x-5)^n}{n!+n}$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n(x+\pi)^n}{n!}$

h) $\sum_{n=0}^{\infty}(4x+2)^{2n+1} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

Funções Representadas por Séries de Potências.

20) Demonstre que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \forall x \in]-1;1[$.

21) Para cada uma das funções a seguir, determine uma série de potências correspondente, e o seu respectivo raio de convergência.

a) $\frac{1}{1+x}$

b) $\frac{3}{1-2x}$

c) $\frac{1}{1+x^3}$

d) $\frac{x^2}{1-4x}$

e) $\frac{1}{2-x}$

f) $\frac{7}{4-3x^3}$

g) $\frac{1}{(1-x)^2}$

h) $\frac{1}{(1-x^2)^2}$

i) $\frac{x^3}{(1-x)^3}$

j) $\frac{1}{(1+x)^4}$

k) $\ln(1-x)$

l) $\ln(1+x)$

m) $\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

n) $arctg(x)$

o) $4x^2 arctg(3x^3)$

22) A função $f(x) = \frac{1}{2-x}$ pode ser representada por série de potências de pelo menos duas formas partindo da série geométrica. Uma delas é obtida através de divisão no numerador e no denominador por 2, onde obtermos $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$. A outra forma é quando fazemos $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-(x-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n$. Qual a diferença entre essas séries, em termos de aplicações? (OBS: Uma ideia interessante é fazer com algum software os desenhos dos gráficos dos primeiros termos dos dois somatórios, e ver o que acontece).

23) Utilize uma das séries de potência deduzidas anteriormente para provar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln(2)$

24) Utilize uma das séries de potência deduzidas anteriormente para provar que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$

25) Com a série de potências da função $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$, é possível se deduzir o valor do logaritmo natural de quais números reais?

26) Com a série de potências da função $\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots$, é possível se deduzir o valor do logaritmo natural de quais números reais? (OBS: Esse exercício é historicamente importante, pois foi com isso que foi deduzida a tabela de logaritmos, importante para a evolução da ciência como um todo).

27) Utilizando o resultado do exercício anterior e um software ou calculadora, calcule o valor de $\ln(30)$, utilizando os primeiros 20 termos de uma série, e compare com o resultado exato.

28) Estime, utilizando os primeiros 5 termos de uma série, os resultados das integrais a seguir:

a) $\int_0^{0.2}\frac{1}{1+x^4}dx$

b) $\int_{-0.3}^{0}\frac{x}{(1+x^3)^2}dx$

c) $\int_{-0.8}^{0.5} 6x \cdot arctg(2x^5)dx$

Séries de MacLaurin e Taylor

29) Defina série de MacLaurin para uma função $f(x)$.

30) Defina série de Taylor para uma função $f(x)$, centrada em $x = x_0$.

31) Demonstre que a série de MacLaurin de $f(x) = e^x$ é dada por $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

32) Demonstre que a série de MacLaurin de $f(x) = \cos(x)$ é dada por $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

33) Demonstre que a série de MacLaurin de $f(x) = sen(x)$ é dada por $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$

34) A função cosseno hiperbólico $\cosh(x)$ pode ser definida como $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Deduza a série de MacLaurin dessa função…

a) …através da definição.

b) …através da soma das séries das funções e^x e e^{-x}

35) A função seno hiperbólico $senh(x)$ pode ser definida como $senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Deduza a série da MacLaurin dessa função…

a) …através da definição.

b) …através da diferença das séries das funções e^x e e^{-x}.

36) Para cada uma das funções a seguir, calcule os n primeiros termos da série de Taylor da função $f(x)$ dada, centrada no ponto x_0, também dado. (OBS: Nem sempre usar a definição é o melhor caminho!)

a) $f(x) = xe^x, x_0 = 0, n = 10$

b) $f(x) = tg(x), x_0 = 0, n = 3$

c) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 100, n = 2$

d) $f(x) = \frac{1-x}{(1+x)^2}, x_0 = 1, n = 3$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}, x_0 = 8, n = 2$

f) $f(x) = x^3, x_0 = -1, n = 3$

37) O que acontece se calcularmos a série de MacLaurin de um polinômio?

38) Fatore o polinômio $x^4 - 3x^2 + 8x + 11$ na forma $a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$.

39) Estime, utilizando uma série de Taylor de grau 2, o valor de $\sqrt{312}$. Dê uma estimativa para o erro cometido.

40) Estime, utilizando uma série de Taylor de grau 2, o valor de $\sqrt[3]{200}$. Dê uma estimativa para o erro cometido.

41) Estime, utilizando uma série de Taylor de grau 2, o valor de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Dê uma estimativa para o erro cometido.

42) Estime, utilizando uma série de Taylor de grau 2, o valor de $sen(128°)$. Dê uma estimativa para o erro cometido.

43) Estime, utilizando uma série de Taylor de grau 2, o valor de $\log_{10}(7)$. Dê uma estimativa para o erro cometido.

44) Estime, utilizando uma série de Taylor de grau 2, o valor de $\frac{1}{0.99^4}$. Dê uma estimativa para o erro cometido.

45) Estime, utilizando uma série de Taylor de grau 2, o valor de $\frac{\sqrt{0.98}}{\sqrt[3]{1.02}}$. Dê uma estimativa para o erro cometido. (Dica: Use $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}}$)

46) Para as questões envolvendo estimativas anteriormente, confira os resultados com uma calculadora.

47) Calcule o valor das integrais a seguir, com precisão $\varepsilon < 10^{-3}$

a) $\int_{-0.2}^{0.2} \frac{\cos(x^3)}{x} dx$

b) $\int_{0}^{0.75} x^3 arctg(x^2) dx$

c) $\int_{0}^{0.3} \frac{x^4}{(1+x^3)^2}\, dx$

d) $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$