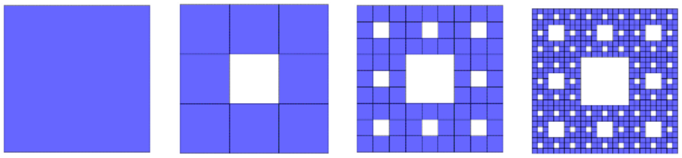
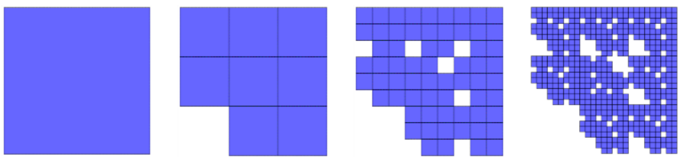
Primeira prova de Séries e Equações Diferenciais – Versão Online

Professor Daniel Henrique Silva - DM – 20 de setembro de 2018

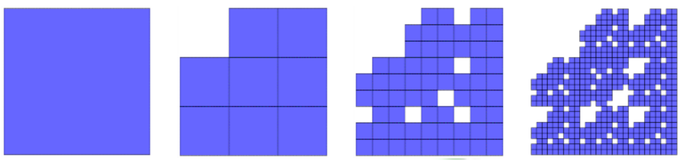
1) A sequência de figuras a seguir mostra os primeiros passos da construção de uma figura fractal:



Nessa sequência, começamos com um quadrado de lado 1, e dividindo cada um de seus lados em três partes, retira-se um dos quadrados em uma posição específica. Depois, para cada quadrado, repete-se o processo a cada passo.



A sequência poderia ser essa ao lado também, dependendo do modelo de prova



…ou essa

a) Escreva uma fórmula para a sequência dos valores da área do fractal na n-ésima iteração, e calcule seu limite.
b) Escreva uma fórmula para a série que calcule a soma de todas as áreas em todas as iterações.
c) Mostre que a série do item anterior converge, e determine seu valor.

2) Para cada uma das séries numéricas, verifique se a série é divergente, condicionalmente convergente, ou absolutamente convergente. Justifique utilizando os critérios de convergência dados em aula.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(3n+2)}{\sqrt{n^4+2n+3}}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{n!}{(2n)!}$ c) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5}{n \cdot (\ln^3(n))}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)}{n}$

ou a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(5n-1)}{\sqrt{n^4+2n+5}}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot \frac{n!}{(2n)!}$ c) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n \cdot (\ln^3(n))}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)}{n}$

ou a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(6n+4)}{\sqrt{n^4+2n+7}}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{n!}{(2n)!}$ c) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n \cdot (\ln^3(n))}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)}{n}$

ou a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(4n+5)}{\sqrt{n^4+2n-1}}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot \frac{n!}{(2n)!}$ c) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n \cdot (\ln^3(n))}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)}{n}$

3) Dada a função $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{(a - bx^3)^2}$. Dica: Lembre-se que $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$

a) Determine uma série de potências que represente essa função em um intervalo A centrado na origem.
b) Determine o domínio A da função no qual a série de potências é válida.

4) Utilizando uma série de MacLaurin, calcule o valor de $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{sen(x^3)}{x} dx$ ou $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{sen(x^4)}{x} dx$ ou $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{sen(x^3)}{x^2} dx$ ou $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{sen(x^4)}{x^2} dx$, com três casas decimais de precisão.

5) Demonstre, usando séries, que $e^{it} = \cos(t) + i \cdot sen(t)$, onde $i^2 = -1$ é a unidade imaginária.

Dado: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ $\quad sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\quad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$